Γιάννης Ράλλης
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών Βορείου Αιγαίου

Χίος, καλοκαίρι 2016

Προκαταρκτικά.
Παρακάτω δίνεται περιληπτικά η ύλη της Ευκλείδειας Γεωμετρίας του Σχολικού βιβλίου της Α Λυκείου μέχρι την ισότητα των ορθογωνίων τριγώνων. Λόγω του ότι οι παραπάνω έννοιες είναι γνωστές από το Γυμνάσιο, προτείνεται η διδασκαλία να γίνει από αυτές τις σημειώσεις σε 4 ή 5 διδακτικές ώρες. Προτείνεται επίσης η επίλυση ασκήσεων σε 3 διδακτικές ώρες.

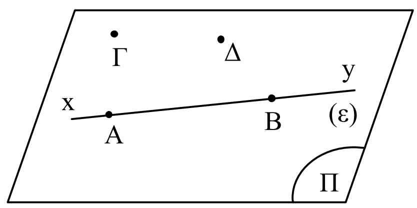
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. ΑΞΙΩΜΑΤΙΚΗ ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ ΤΗΣ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

- **Πρωταρχικές έννοιες.** Στην Ευκλείδεια Γεωμετρία ξεκινάμε από έννοιες που προκύπτουν άμεσα από την εμπειρία μας, όπως οι έννοιες σημείο, ευθεία, επίπεδο, τις οποίες δεχόμαστε χωρίς άλλες διευκρινήσεις. Οι έννοιες αυτές λέγονται πρωταρχικές έννοιες.
- **Αξιώματα.** Οι πρωταρχικές έννοιες υπόκεινται σε διάφορες παραδοχές, όπως :
  - ✓ Από δυο σημεία διέρχεται μοναδική ευθεία.
  - ✓ Για κάθε ευθεία υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο του επιπέδου που δεν ανήκει σ' αυτήν.
  - ✓ Κάθε ευθεία έχει άπειρα σημεία και επεκτείνεται απεριόριστα και προς τις δυο κατευθύνσεις χωρίς διακοπές και κενά.

  Ισχυρισμοί όπως οι παραπάνω γίνονται δεκτοί ως αληθείς χωρίς απόδειξη και λέγονται αξιώματα.
- **Ορισμοί**. είναι νέες έννοιες που ορίζονται με βάση παλαιότερες έννοιες και προτάσεις που έχουμε αποδείξει.
- **Προτάσεις, θεωρήματα, πορίσματα**. Είναι ισχυρισμοί που αποδεικνύονται με χρήση προηγούμενων προτάσεων και αξιωμάτων με τη βοήθεια των κανόνων της Μαθηματικής Λογικής.

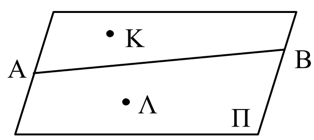
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΤΑ ΒΑΣΙΚΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

Επίπεδο. Σημείο. Ευθεία.
Είναι πρωταρχικές έννοιες.

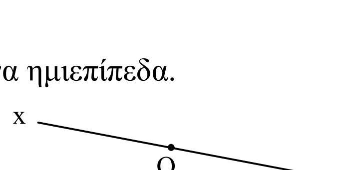


- Το επίπεδο συμβολίζεται συνήθως με ένα κεφαλαίο γράμμα, π.χ. το επίπεδο Π.
- Τα σημεία συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα. π.χ. τα σημεία Α, Β, Γ, Δ.
- Μια ευθεία μπορεί να συμβολιστεί με τρεις τρόπους ; Η ευθεία ΑΒ, η ευθεία (ε), η ευθεία xy.

Ημιεπίπεδο, ημιευθεία, ευθύγραμμο τμήμα.



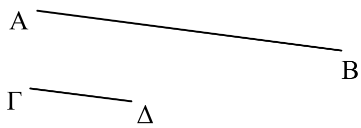
- Το ημιεπίπεδο (ΑΒ, Κ) περιλαμβάνει την ευθεία ΑΒ και όλα τα σημεία του επιπέδου που βρίσκονται προς το ίδιο μέρος με το Κ.
  - ✓ Τα ημιεπίπεδα (ΑΒ,Κ) και (ΑΒ,Λ) λέγονται αντικείμενα ημιεπίπεδα.
- Αν Ο είναι σημείο της ευθείας xy, τότε δημιουργούνται δυο ημιευθείες Οx και Οy. Επομένως η ημιευθεία έχει



αρχή και δεν έχει τέλος.

- Οι ημιευθείες Οx και Οy λέγονται αντικείμενες.
- Αν Α, Β είναι δυο σημεία της ευθείας (ε), τότε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ περιλαμβάνει τα σημεία Α, Β και τα σημεία της (ε) που βρίσκονται μεταξύ των Α, Β.

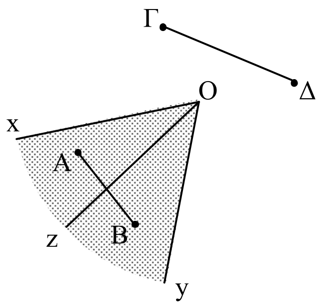
Δυο ευθύγραμμα τμήματα λέγονται ίσα όταν το ένα μπορεί με κατάλληλη μετακίνηση να συμπέσει με το άλλο.

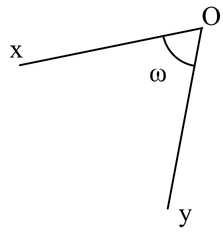


- ✓ Το σημείο Μ λέγεται μέσο του ΑΒ όταν ΜΑ = ΜΒ.
- ✓ Αν το ευθ. τμήμα ΓΔ θεωρηθεί ως μονάδα και είναι ΑΒ = ρ·ΓΔ, τότε ο πραγματικός αριθμός ρ λέγεται μήκος του ΑΒ και συμβολίζεται με (ΑΒ).

Γωνία, κυρτή γωνία, μη κυρτή γωνία, διχοτόμος γωνίας.

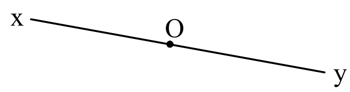
Θεωρούμε δυο ημιευθείες Οx, Οy με κοινή αρχή Ο. Αν οι Οx, Οy δεν είναι αντικείμενες, τότε το επίπεδο χωρίζεται σε δυο μέρη, το κυρτό και το μη κυρτό.

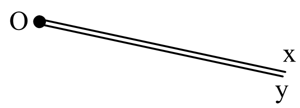




- Το κυρτό μέρος έχει την ιδιότητα : Αν Α, Β είναι δυο τυχαία σημεία του, τότε ολόκληρο το ευθ. τμήμα ΑΒ περιλαμβάνεται σε αυτό.
- Το μη κυρτό μέρος έχει την ιδιότητα : Μπορούμε να βρούμε δυο σημεία Γ, Δ, τέτοια ώστε το ευθ. τμήμα ΓΔ να μην περιλαμβάνεται σε αυτό. Συνήθως με τον όρο γωνία εννοούμε την κυρτή γωνία.
- Το κυρτό μέρος λέγεται (κυρτή) γωνία και το μη κυρτό μέρος λέγεται μη κυρτή γωνία.
- Συμβολισμός : $x\hat{O}y$, $\hat{O}$, $\hat{\omega}$.
- Δυο γωνίες λέγονται ίσες όταν η μια μπορεί με κατάλληλη μετακίνηση να συμπέσει με την άλλη.
- Η ημιευθεία Οz λέγεται διχοτόμος της γωνίας $x\hat{O}y$ όταν την χωρίζει σε δυο ίσες γωνίες, δηλ. $x\hat{O}z = z\hat{O}y$.

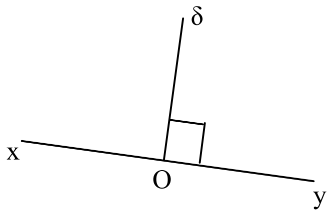
Ευθεία γωνία, μηδενική γωνία, πλήρης γωνία

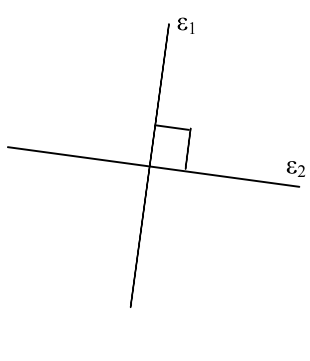




- Θεωρούμε τις αντικείμενες ημιευθείες Οx, Οy. Τότε σχηματίζονται δυο ημιεπίπεδα. Καθένα από αυτά ονομάζεται **ευθεία γωνία**.
- Θεωρούμε τις ταυτιζόμενες ημιευθείες Οx, Οy. .Αυτές σχηματίζουν μια κυρτή και μια μη κυρτή γωνία. Η κυρτή ονομάζεται **μηδενική γωνία** και η μη κυρτή ονομάζεται **πλήρης γωνία** ($x\hat{O}y$).

Ορθή γωνία, κάθετες ευθείες.



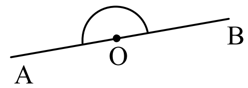


- Θεωρούμε την ευθεία γωνία $x\hat{O}y$ και τη διχοτόμο της Οδ. Καθεμία από τις ίσες γωνίες $x\hat{O}\delta$, $\delta\hat{O}y$ ονομάζεται ορθή γωνία (συμβολισμός :$1\llcorner$)

Οι φορείς των πλευρών μιας ορθής γωνίας ονομάζονται «κάθετες ευθείες» (συμβολισμός $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$).

Διευκόλυνση. Αντί για $1\llcorner$, μπορούμε να λέμε ότι η ορθή γωνία είναι 90^0.

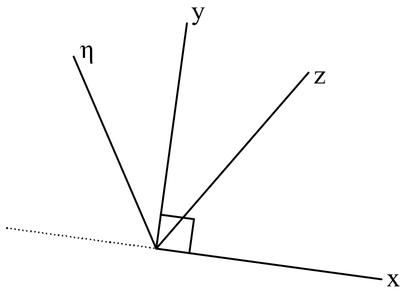
Ευθεία γωνία. Μια γωνία που οι πλευρές της είναι αντικείμενες ημιευθείες λέγεται ευθεία γωνία (και είναι ίση με $2\llcorner$ ή 180^0.



Οξεία και αμβλεία γωνία.

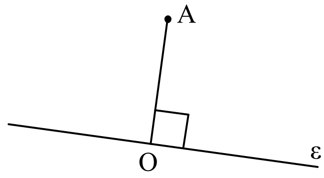
Θεωρούμε την ορθή γωνία $x\hat{O}y$.

- Η κυρτή γωνία $z\hat{O}x$ που είναι μικρότερη της ορθής λέγεται οξεία γωνία.
- Η κυρτή γωνία $z\hat{O}x$ που είναι μεγαλύτερη της ορθής λέγεται αμβλεία γωνία.



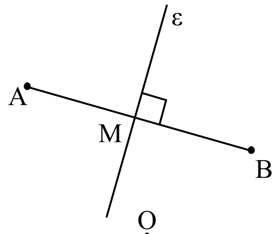
Απόσταση σημείου από ευθεία.

Θεωρούμε ευθεία (ε) και σημείο Α εκτός της ευθείας. Από το Α φέρνουμε το κάθετο ευθ. τμήμα ΟΑ προς την (ε). Το μήκος (ΟΑ) του ΟΑ ονομάζεται «απόσταση του σημείου Ο από την (ε)»



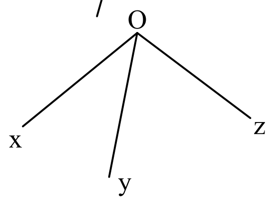
Μεσοκάθετος ευθυγράμμου τμήματος

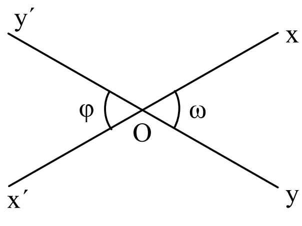
Θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και το μέσο του Μ. Από Μ φέρνουμε την (ε) $\perp$ ΑΒ. Η ευθεία (ε) λέγεται «μεσοκάθετος του ΑΒ».



Εφεξής, συμπληρωματικές, παραπληρωματικές κατακορυφήν γωνίες.

- Δυο γωνίες λέγονται εφεξής όταν έχουν κοινή κορυφή, κοινή πλευρά και κανένα άλλο κοινό σημείο (π.χ. $x\hat{O}y = y\hat{O}z$)
- Δυο γωνίες λέγονται συμπληρωματικές όταν έχουν άθροισμα $1\llcorner$ (δηλ. 90^0).
- Δυο γωνίες λέγονται παραπληρωματικές όταν έχουν άθροισμα $2\llcorner$ (δηλ. 180^0).
- Δυο γωνίες λέγονται κατακορυφήν όταν οι πλευρές τους είναι ανά δυο αντικείμενες ημιευθείες , (π.χ. $\hat{\omega}, \hat{\varphi}$)

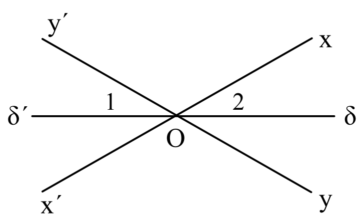




Θεώρημα. Οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες. (Απόδειξη : Με βάση το παραπάνω σχήμα έχουμε $\hat{\omega} + x\hat{O}y' = 180^0$ και $\hat{\varphi} + x\hat{O}y' = 180^0$. Άρα είναι $\hat{\omega} + x\hat{O}y' = \hat{\varphi} + x\hat{O}y' \Leftrightarrow \hat{\omega} = \hat{\varphi}$).

Θεώρημα. Οι διχοτόμοι δυο κατακορυφήν γωνιών είναι αντικείμενες ημιευθείες.

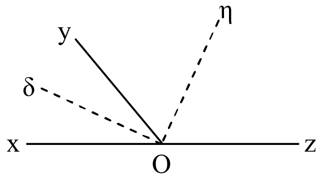
Απόδειξη : Έστω Οδ, Οδ΄ οι διχοτόμοι των κατακορυφήν



γωνιών $x\hat{O}y$, $x'\hat{O}y'$. Τότε $\delta'\hat{O}\delta = \hat{O}_1 + y'\hat{O}x + \hat{O}_2$ (1). Αλλά $\hat{O}_1 = \dfrac{x'\hat{O}y'}{2}$ και $\hat{O}_2 = \dfrac{x\hat{O}y}{2}$. Έτσι η (1) γίνεται : $\delta'\hat{O}\delta = \dfrac{x'\hat{O}y'}{2} + y'\hat{O}x + \dfrac{x\hat{O}y}{2} = \; = 2\dfrac{x'\hat{O}y'}{2} + y'\hat{O}x = x'\hat{O}y' + y'\hat{O}x = 180^0$. Άρα Οδ, Οδ΄ αντικείμενες ημιευθείες.

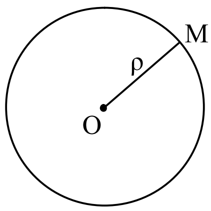
Θεώρημα. Οι διχοτόμοι δυο εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών είναι κάθετες. (Απόδειξη. Θεωρούμε τις διχοτόμους Οδ, Οη των εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών $x\hat{O}y$, $y\hat{O}z$. Τότε

$\delta\hat{O}\eta = \delta\hat{O}y + y\hat{O}\eta = \dfrac{x\hat{O}y}{2} + \dfrac{}{2} = \dfrac{x\hat{O}y + y\hat{O}z}{2} = \dfrac{180^0}{2} = 90^0$. Άρα είναι $O\delta \perp O\delta'$.

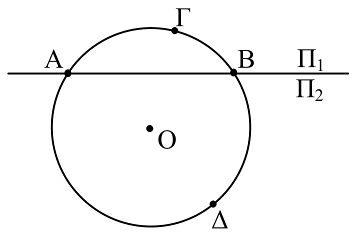


Κύκλος, τόξο, χορδή.

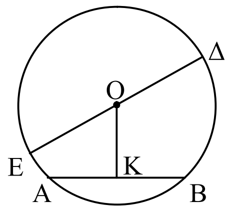
Κύκλος με **κέντρο** Ο και **ακτίνα** ρ λέγεται το επίπεδο σχήμα του οποίου όλα τα σημεία απέχουν από το Ο απόσταση ίση με ρ. Δεχόμαστε ότι ο κύκλος είναι μία κλειστή γραμμή χωρίς διακοπές και κενά. Ένας κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ συμβολίζεται με (Ο, ρ)



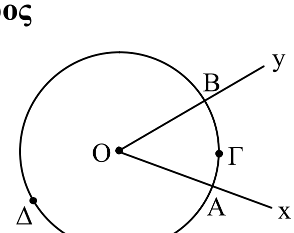
Τόξο, χορδή.
Ας θεωρήσουμε έναν κύκλο, κέντρου Ο και δύο σημεία του Α και Β (σχ.41α). Τα σημεία αυτά χωρίζουν τον κύκλο σε δύο μέρη. Το ένα βρίσκεται στο ημιεπίπεδο Π1, που ορίζει η ευθεία ΑΒ, και το άλλο στο Π2. Καθένα από τα μέρη αυτά λέγεται **τόξο** του κύκλου με άκρα Α και Β και συμβολίζεται με $\overset{\frown}{AB}$. Για να είμαστε πιο ακριβείς αναφερόμαστε στα τόξα $\overset{\frown}{A\Gamma B}$ και $\overset{\frown}{A\Delta B}$.
Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ (σχ.41β) που ορίζεται από τα άκρα Α, Β ενός τόξου λέγεται **χορδή** του κύκλου.



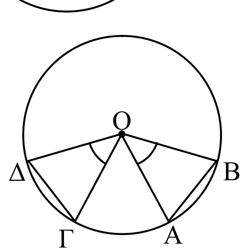
Το μοναδικό κάθετο τμήμα ΟΚ (σχ.41β) που άγεται από το κέντρο Ο προς τη χορδή ΑΒ λέγεται **απόστημα** της χορδής.
Μια χορδή που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου λέγεται **διάμετρος** του κύκλου.



Μία γωνία λέγεται **επίκεντρη** όταν η κορυφή της είναι το κέντρο ενός κύκλου, π.χ. η $x\hat{O}y$ είναι μία επίκεντρη γωνία.
Οι πλευρές της τέμνουν τον κύκλο στα σημεία Α και Β. Το τόξο $\overset{\frown}{A\Gamma B}$ που περιέχεται στο εσωτερικό της γωνίας και έχει άκρα τα Α, Β λέγεται **αντίστοιχο τόξο** της επίκεντρης γωνίας. Επίσης, λέμε ότι η επίκεντρη γωνία $A\hat{O}B$ **βαίνει** στο $\overset{\frown}{A\Gamma B}$.

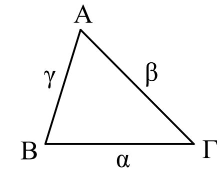


Σύμβαση : Μέτρο τόξου είναι το μέτρο της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας, δηλ. $\left(\overset{\frown}{AB}\right) = \left(A\hat{O}B\right)$.

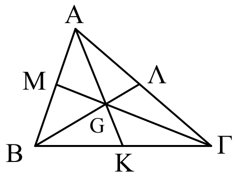


ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΤΡΙΓΩΝΑ

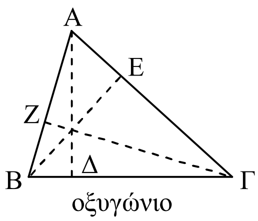
Κύρια και δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου.

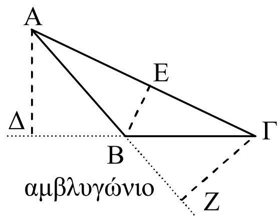


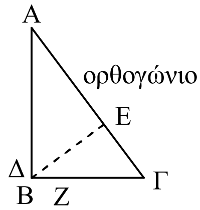
- Κύρια στοιχεία του τριγώνου είναι οι πλευράς ΑΒ = γ, ΒΓ = α, ΓΑ = β και οι γωνίες $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$.
- Δευτερεύοντα στοιχεία του τριγώνου είναι οι διάμεσοι, οι διχοτόμοι και τα ύψη.
- Διάμεσος τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που έχει άκρα μια κορυφή και το μέσο της απέναντι πλευράς : $AK = \mu_\alpha$,



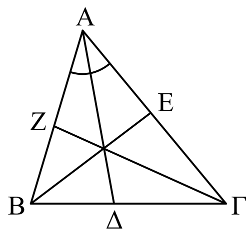
- Ύψος είναι το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα που άγεται από την κορυφή προς την ευθεία της απέναντι πλευράς : $A\Delta = \upsilon_\alpha$, $BE = \upsilon_\beta$, $\Gamma Z = \upsilon_\gamma$.







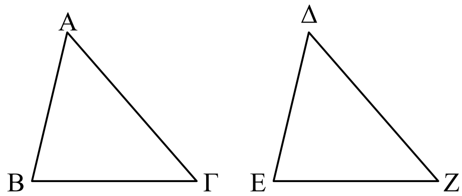
- Διχοτόμος είναι το ευθύγραμμο τμήμα της διχοτόμου που άγεται από την κορυφή μέχρι την απέναντι πλευρά : $A\Delta = \delta_\alpha$, $BE = \delta_\beta$, $\Gamma Z = \delta_\gamma$.



Ορισμός ισότητας τριγώνων.

Δυο τρίγωνα λέγονται ίσα όταν έχουν τα κύρια στοιχεία τους ίσα, δηλ. ΑΒ = ΔΕ, ΒΓ = ΕΖ, ΓΑ = ΖΔ, $\hat{A} = \hat{\Delta}$, $\hat{B} = \hat{E}$, $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$.

Κριτήρια ισότητας τριγώνων.

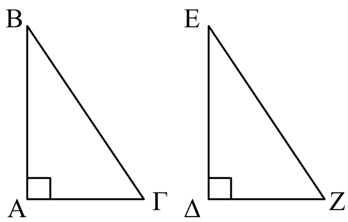


- Κρ. 1 (π-π-π). Αν ΑΒ = ΔΕ, ΒΓ = ΕΖ, ΓΑ = ΖΔ, τότε $\overset{\Delta}{AB\Gamma} = \overset{\Delta}{\Delta EZ}$.
- Κρ. 2 (π-γ-π). Αν ΑΒ = ΔΕ, $\hat{A} = \hat{\Delta}$, ΑΓ = ΔΖ, τότε $\overset{\Delta}{AB\Gamma} = \overset{\Delta}{\Delta EZ}$.
- Κρ. 3 (γ-π-γ). Αν $\hat{B} = \hat{E}$, ΒΓ = ΕΖ, $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$, τότε $\overset{\Delta}{AB\Gamma} = \overset{\Delta}{\Delta EZ}$.

Οι αποδείξεις παραλείπονται.

Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων.

Θεωρούμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ ($\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^0$).



- Κρ. 1. Αν ΑΒ = ΔΕ, ΑΓ = ΔΖ, τότε $\overset{\Delta}{AB\Gamma} = \overset{\Delta}{\Delta EZ}$.
- Κρ. 2. Αν ΑΒ = ΔΕ, $\hat{B} = \hat{E}$, τότε $\overset{\Delta}{AB\Gamma} = \overset{\Delta}{\Delta EZ}$.
- Κρ. 3. Αν ΒΓ = ΕΖ, $\hat{B} = \hat{E}$, τότε $\overset{\Delta}{AB\Gamma} = \overset{\Delta}{\Delta EZ}$.
- Κρ. 4. Αν ΑΒ = ΔΕ, ΒΓ = ΕΖ, $\overset{\Delta}{AB\Gamma} = \overset{\Delta}{\Delta EZ}$.

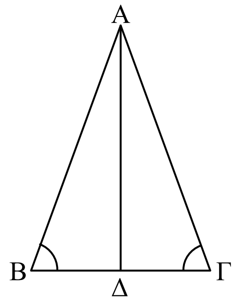
Τα παραπάνω τέσσερα κριτήρια συνοψίζονται στα εξής δυο :

- Κρ.Ορ.1. Αν δυο ορθογώνια τρίγωνα έχουν δυο αντίστοιχες πλευρές ίσες, τότε είναι ίσα.
- Κρ.Ορ.2. Αν δυο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μια αντίστοιχη πλευρά ίση και μια αντίστοιχη γωνία ίση, τότε είναι ίσα.

Διευκόλυνση. Μπορούμε να χρησιμοποιούμε την εξής πρόταση, η οποία αποδεικνύεται σε επόμενο κεφάλαιο : Το άθροισμα των γωνιών οποιουδήποτε τριγώνου είναι 180^0.

Βασική ιδιότητα των ισοσκελών τριγώνων.

$AB = A\Gamma \Leftrightarrow \hat{B} = \hat{\Gamma}$ (Η συνεπαγωγή $\hat{B} = \hat{\Gamma} \Rightarrow AB = A\Gamma$ αποδεικνύεται σε επόμενο κεφάλαιο, αλλά για διευκόλυνση μπορεί να χρησιμοποιείται από τώρα).



Βασικές ιδιότητες των ισοσκελών τριγώνων.

Θεωρούμε τις παρακάτω τέσσερις προτάσεις :

- Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές (ΑΒ=ΑΓ).
- Το ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου.
- Το ΑΔ είναι διάμεσος του τριγώνου.
- Το ΑΔ είναι διχοτόμος του τριγώνου

Αν ισχύουν δύο από τις παραπάνω προτάσεις, τότε ισχύουν και οι άλλες δυο (όλες οι προτάσεις αποδεικνύονται με τη βοήθεια σύγκρισης τριγώνων).