Γιάννης Ράλλης
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών Βορείου Αιγαίου

ΕΠΙΚΕΝΤΡΕΣ, ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΕΣ, ΓΩΝΙΕΣ ΧΟΡΔΗΣ ΚΑΙ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ (για τη Α Λυκείου)

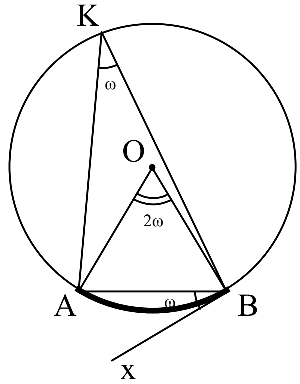
Θεωρώ ότι το 6^{o} κεφάλαιο (εγγεγραμμένα σχήματα) της Γεωμετρίας της **Α Λυκείου** είναι πολύ σημαντικό και είναι καλό να διδάσκεται. Παρακάτω δίνεται περιληπτικά το περιεχόμενο του κεφαλαίου αυτού και πέντε (5) αντιπροσωπευτικές ασκήσεις.

Ορισμοί.

(Ι). Η γωνία $\mathrm{A\hat{O}B}$ που έχει κορυφή το κέντρο του κύκλου λέγεται επίκεντρη, η οποία αντιστοιχεί στο τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ ή «βαίνει» στο τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$.

(ΙΙ). Η γωνία $\mathrm{A\hat{K}B}$ που έχει κορυφή σημείο του κύκλου και οι πλευρές της τέμνουν τον κύκλο λέγεται εγγεγραμμένη, η οποία αντιστοιχεί στο τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ ή «βαίνει» στο τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$.

(ΙΙΙ). Η γωνία $\mathrm{A\hat{K}B}$ που έχει κορυφή σημείο του κύκλου, η μια πλευρά της τέμνει τον κύκλο και η άλλη πλευρά της εφάπτεται στον κύκλο λέγεται «γωνία από χορδή και εφαπτομένη», η οποία αντιστοιχεί στο τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ ή «βαίνει» στο τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$.



1^{o} σχήμα

Θεώρημα. Οι παραπάνω γωνίες συνδέονται με τις σχέσεις : $\hat{\mathrm{K}} = \mathrm{A\hat{B}}x = \hat{\omega}$, $\hat{\mathrm{O}} = 2\hat{\omega}$, δηλ. η εγγεγραμμένη γωνία είναι η μισή της αντίστοιχης επίκεντρης και η εγγεγραμμένη είναι ίση με την αντίστοιχη γωνία που σχηματίζεται από χορδή και εφαπτομένη (βλ. σχ. 1)

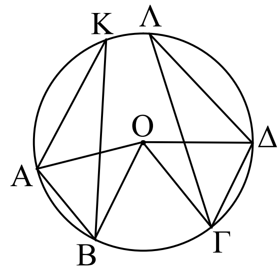
Θεώρημα. Οι παρακάτω προτάσεις που αναφέρονται στον ίδιο κύκλο ή σε ίσους κύκλους είναι ισοδύναμες (υποτίθεται ότι διαπραγματευόμαστε γωνίες και τόξα μικρότερα ή ίσα από 180^{0}) :

(α). $\mathrm{A\hat{O}B} = \Gamma\hat{\mathrm{O}}\Delta$ (επίκεντρες γωνίες ίσες)

(β). $\mathrm{A\hat{K}B} = \Gamma\hat{\Lambda}\Delta$ (εγγεγραμμένες γωνίες ίσες)

(γ). $\overset{\frown}{\mathrm{AB}} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ (τόξα ίσα)

(δ). ΑΒ = ΓΔ (χορδές ίσες).



2^{o} σχήμα

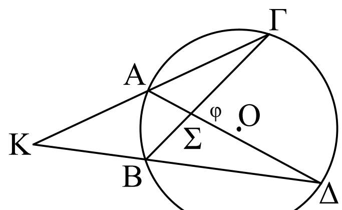
$\boxed{\textbf{Θεώρημα.}}$ (Σχέση γωνιών και τόξων).

Συμφωνία : $(\hat{\mathrm{O}}) = (\overset{\frown}{\mathrm{AB}})$ (το μέτρο της επίκεντρης γωνίας ισούται με το μέτρο του αντίστοιχου τόξου (1^{o} σχήμα).

Άμεση συνέπεια : $(\hat{\mathrm{K}}) = \dfrac{(\overset{\frown}{\mathrm{AB}})}{2}$ (1^{o} σχήμα).

Επίσης : (Ι). $(\hat{\varphi}) = \dfrac{(\overset{\frown}{\mathrm{AB}}) + (\overset{\frown}{\Gamma\Delta})}{2}$ (3^{o} σχήμα).

(ΙΙ). $(\hat{\mathrm{K}}) = \dfrac{(\overset{\frown}{\Gamma\Delta}) - (\overset{\frown}{\mathrm{AB}})}{2}$ (3^{o} σχήμα).

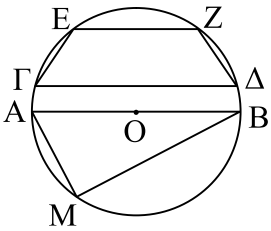


3^{o} σχήμα

$\boxed{\textbf{Πορίσματα.}}$ (αναφέρονται στα παραπάνω θεωρήματα). Προτείνω να αποδειχθούν.

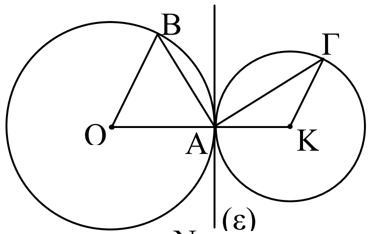
Π1. Αν ΑΒ διάμετρος, τότε $\text{Α}\hat{\text{Μ}}\text{Β} = 90^0$ (κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή).

Π2. ΕΖ // ΓΔ $\Leftrightarrow$ $\overset{\frown}{\text{ΕΓ}} = \overset{\frown}{\text{ΖΔ}}$ (Άρα κάθε εγγεγραμμένο σε κύκλο τραπέζιο είναι ισοσκελές).

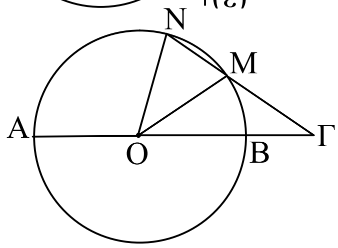


Προτεινόμενες Ασκήσεις για λύση

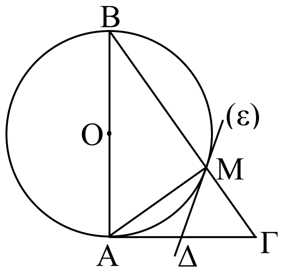
Άσκηση 1. Δίνεται δύο κύκλοι $(\text{Ο},\rho_1)$, $(\text{Κ},\rho_2)$ εφαπτόμενοι εξωτερικά στο Α. Θεωρούμε τη χορδή ΑΒ του κύκλου $(\text{Ο},\rho_1)$ και τη χορδή ΑΓ του κύκλου $(\text{Κ},\rho_2)$ έτσι ώστε ΑΒ $\perp$ ΑΓ. Να αποδειχθεί ότι οι ακτίνες ΟΒ, ΚΓ είναι παράλληλες.



Άσκηση 2. Δίνεται κύκλος (Ο,ρ) και η διάμετρός του ΑΒ. Στην προέκταση του ΑΒ προς το Β θεωρούμε σημείο Γ και πάνω στον κύκλο σημείο Μ έτσι ώστε ΜΓ = ρ. Η ΓΜ επανατέμνει τον κύκλο στο Ν. Να αποδειχθεί ότι $\text{Ν}\hat{\text{Ο}}\text{Α} = 3 \cdot \text{Μ}\hat{\text{Ο}}\text{Γ}$.



Άσκηση 3. Δίνεται ορθ. τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{\text{Α}} = 90^0$) και ο κύκλος διαμέτρου ΑΒ που τέμνει τη ΒΓ στο Μ. Η εφαπτομένη (ε) στο Μ τέμνει την ΑΓ στο Δ. Να δειχθεί ότι το Δ είναι μέσο του ΑΓ,



Άσκηση 4. Δίνεται κύκλος (Ο,ρ) και διάμετρος ΑΒ. Θεωρούμε σημείο Μ στην προέκταση του ΒΑ προς το Α. Από το Μ φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΜΓ, ΜΔ προς τον κύκλο. Να αποδειχθεί ότι οι ΔΑ, ΔΒ είναι η εσωτερική και εξωτερική διχοτόμος της γωνίας $\text{Μ}\hat{\text{Δ}}\text{Γ}$ του τριγώνου ΜΔΓ.