Γιάννης Ράλλης
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών Βορείου Αιγαίου

Χίος, καλοκαίρι 2016

ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΝΟΛΩΝ, ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ

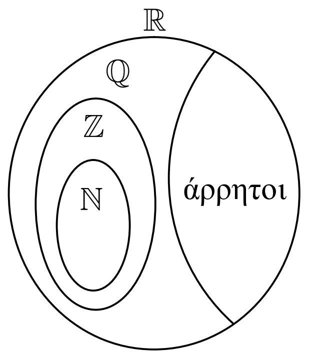
Προκειμένου να διατυπώνουν οι μαθητές με σαφήνεια τις σκέψεις τους, οφείλουν να έχουν ισχυρές βάσεις σε όλα τα παραπάνω.
Το υλικό αυτού του φυλλαδίου δεν αποτελεί μέρος εξεταζόμενου μαθήματος. Αντίθετα πρέπει συνεχώς να επανερχόμαστε, όποτε αυτό κρίνεται απαραίτητο.
Η Θεωρία Συνόλων και η Μαθηματική Λογική δεν είναι δυο πεδία ανεξάρτητα μεταξύ τους. Υπάρχει άμεση συσχέτιση μεταξύ τους, όπως θα φανεί και παρακάτω.

Τι ονομάζεται σύνολο.
Σύνολο είναι κάθε συλλογή αντικειμένων, που προέρχονται από την εμπειρία μας ή τη διανόησή μας, είναι καλά ορισμένα και διακρίνονται το ένα από το άλλο.

Τα σύμβολα $\in$ (ανήκει), και $\notin$ (δεν ανήκει).
Για να δηλώσουμε ότι το x είναι στοιχείο του συνόλου Α, γράφουμε $x \in A$ και διαβάζουμε «το x ανήκει στο Α», ενώ για να δηλώσουμε ότι το x δεν είναι στοιχείο του συνόλου Α γράφουμε $x \notin A$ και διαβάζουμε «το x δεν ανήκει στο Α».

Αναπαράσταση ενός συνόλου
α τρόπος. Με αναγραφή των στοιχείων του συνόλου, π.χ. $A = \{2, 4, 6, 8\}$
β τρόπος. Με περιγραφή των στοιχείων του συνόλου. Γενικά, αν από ένα σύνολο Ω επιλέξουμε εκείνα τα στοιχεία του, που έχουν μια ορισμένη ιδιότητα Ι, τότε φτιάχνουμε ένα νέο σύνολο που συμβολίζεται με: $\{x \in \Omega / x \text{ έχει την ιδιότητα I}\}$ και διαβάζεται «Το σύνολο των $x \in \Omega$, όπου x έχει την ιδιότητα Ι».

Τα βασικά σύνολα των αριθμών.
Με $\mathbb{N}$ συμβολίζουμε το σύνολο των φυσικών αριθμών, δηλ. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$
Με $\mathbb{Z}$ συμβολίζουμε το σύνολο των ακεραίων αριθμών, δηλ. $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$
Με $\mathbb{Q}$ συμβολίζουμε το σύνολο των ρητών ή κλασματικών αριθμών, δηλ. $\mathbb{Q} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, x = \frac{\mu}{\nu}, \text{ όπου } \mu, \nu \text{ ακέραιοι και } \nu \neq 0 \right\}$



Με $\mathbb{R}$ συμβολίζουμε το βασικό σύνολο που περιλαμβάνει όλους τους αριθμούς.

Υποσύνολο συνόλου.
Ένα σύνολο Α λέγεται υποσύνολο ενός συνόλου Β, όταν κάθε στοιχείο του Α είναι και στοιχείο του Β. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε $A \subseteq B$. Π.χ. $\{1,2,3\} \subseteq \{1,2,3,4,5\}$. Επίσης ισχύει $\{1,2,3\} \subseteq \{1,2,3\}$.
Σημείωση. Είναι φανερό ότι $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.

Ίσα σύνολα

Αν $\left\{\begin{matrix} A \subseteq B \\ B \subseteq A \end{matrix}\right\}$, δηλ. αν κάθε στοιχείο του Α είναι και στοιχείο του Β και κάθε στοιχείο του Β είναι και στοιχείο του Α (με άλλα λόγια τα Α, Β έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία), τότε τα σύνολα Α, Β λέγονται ίσα (συμβ. Α=Β).

Ιδιότητες.

(I). Α⊆Α, για κάθε σύνολο Α (ανακλαστική ιδιότητα)

(II). Αν Α⊆Β και Β⊆Γ, τότε Α⊆Γ (μεταβατική ιδιότητα)

(III). Αν Α⊆Β και Β⊆Α, τότε Α=Β (αντισυμμετρική ιδιότητα)

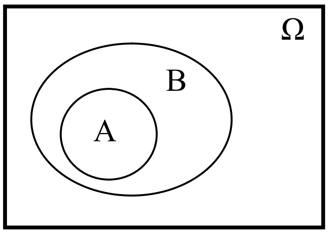
Το κενό σύνολο

Κενό σύνολο είναι το σύνολο που δεν έχει στοιχεία. Συμβολίζεται με $\varnothing$.

Διαγράμματα Venn.

Κάθε φορά που εργαζόμαστε με σύνολα, αυτά θεωρούνται υποσύνολα ενός συνόλου που λέγεται **βασικό σύνολο** και συμβολίζεται με Ω.

Για παράδειγμα, τα σύνολα $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ είναι υποσύνολα του βασικού συνόλου $\Omega = \mathbb{R}$.



Το βασικό σύνολο συμβολίζεται με το εσωτερικό ενός ορθογωνίου, ενώ κάθε υποσύνολο ενός βασικού συνόλου παριστάνεται με το εσωτερικό μιας κλειστής καμπύλης που περιέχεται στο εσωτερικό του ορθογωνίου.

Αν Α⊆Β, τότε το Α παριστάνεται με το εσωτερικό μιας κλειστής καμπύλης που περιέχεται στο εσωτερικό της κλειστής καμπύλης που παριστάνει το Β.

Προτάσεις και προτασιακοί τύποι.

- Μαθηματική Πρόταση (ή απλά Πρόταση) ονομάζεται κάθε ισχυρισμός που μπορεί να είναι είτε Αληθής (Α) είτε Ψευδής (Ψ).

  Οι παρακάτω ισχυρισμοί είναι προτάσεις :
  - ✓ Οι 2 είναι άρτιος φυσικός αριθμός.
  - ✓ Το 25 είναι αρνητικός αριθμός.

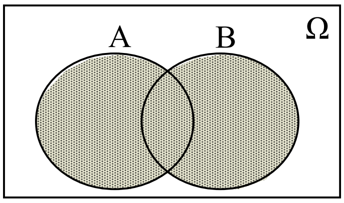
  Ο παρακάτω ισχυρισμός δεν είναι πρόταση :
  - ✓ Αύριο ίσως βρέξει.
- Προτασιακός τύπος είναι μια πρόταση που αναφέρεται σε μια μεταβλητή. Η μεταβλητή αυτή παίρνει τιμές μέσα σε ένα σύνολο αναφοράς Ω. Επομένως η πρόταση έχει τη μορφή p(x). Για κάθε τιμή του x η πρόταση είναι είτε αληθής είτε ψευδής. Παράδειγμα :
  - ✓ Θεωρούμε την πρόταση $x^2 = 1$, όπου το x παίρνει τιμές στο $\mathbb{R}$. Για $x = 1$, $x = -1$ η πρόταση είναι αληθής. Για όλες τις υπόλοιπες τιμές στο $\mathbb{R}$ η πρόταση είναι ψευδής.

Πράξεις με σύνολα.

Ξεκινούμε με αριθμητικά παραδείγματα. Θεωρούμε τα σύνολα $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ και $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$.

Ένωση, τομή και συμπλήρωμα συνόλου.

Ένωση συνόλων



$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Δηλαδή η ένωση $A \cup B$ αποτελείται από τα στοιχεία που ανήκουν είτε στο A, είτε στο B είτε και στα δυο σύνολα μαζί.
Γενικά : $A \cup B = \{x \in \Omega : x \in A \text{ ή } x \in B\}$

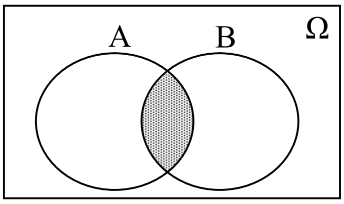
Παρατηρήσεις.

(I). Αν P και Q είναι δύο προτάσεις, τότε η πρόταση «**P ή Q**» αληθεύει μόνο στην περίπτωση που μια τουλάχιστον από τις δύο προτάσεις αληθεύει.

(II). Η πρόταση «P ή Q» λέγεται διάζευξη των P, Q. Υπάρχουν δυο ειδών διαζεύξεις.

- ✓ Η εγκλειστική διάζευξη που περιγράφτηκε πιο πάνω. Συμβολίζεται « $P \vee Q$ ».
- ✓ Η αποκλειστική διάζευξη « $P \veebar Q$ » αληθεύει μόνο όταν μια ακριβώς από τις δυο προτάσεις είναι αληθής.

Τομή συνόλων.



$A \cap B = \{5,6\}$. $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Δηλαδή η τομή $A \cap B$ αποτελείται από τα στοιχεία που ανήκουν ταυτόχρονα στο A και στο B.
Γενικά : $A \cap B = \{x \in \Omega : x \in A \text{ και } x \in B\}$

Παρατήρηση.

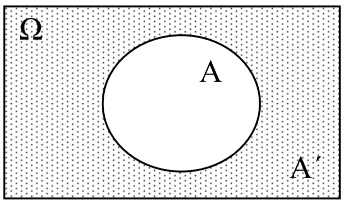
Αν P και Q είναι δύο προτάσεις, τότε η πρόταση «**P και Q**» αληθεύει μόνο στην περίπτωση που αληθεύουν ταυτόχρονα και οι δυο προτάσεις και λέγεται σύζευξη των P και Q. Συμβολίζεται « $P \wedge Q$ ».

Τελικά συμπεράσματα.

(I). Η «ένωση» συνδέεται άμεσα με το «**ή**», με το «όλα τα αντικείμενα». Συμφωνούμε να γράφουμε «p(x) ή q(x) »

(I). Η «τομή» συνδέεται με το «και», με τη «συναλήθευση», με το «κοινά αντικείμενα». Συμφωνούμε να γράφουμε είτε «p(x) και q(x)» είτε $\begin{Bmatrix} p(x) \\ q(x) \end{Bmatrix}$

Συμπλήρωμα συνόλου.



Αν Ω = {1,2,3,4,5,6,7,8} και A = {1,2,3,4,5,6} τότε A′={7,8}.
Δηλαδή συμπλήρωμα ενός υποσυνόλου A ενός βασικού συνόλου Ω λέγεται το σύνολο των στοιχείων του Ω που δεν ανήκουν στο A και συμβολίζεται με A′.
Γενικά : $A' = \{x \in \Omega \,/\, x \notin A\}$.

Παρατήρηση.

Αν P είναι μια πρόταση, τότε η πρόταση « **όχι P** » ή συμβολικά « **¬P** » αληθεύει μόνο όταν η P είναι ψευδής και αντιστρόφως.

Η έννοια της συνεπαγωγής.

Αν P και Q είναι δύο προτάσεις, τέτοιες ώστε, όταν αληθεύει η P να αληθεύει και η Q, τότε λέμε ότι η P συνεπάγεται την Q και γράφουμε $\mathbf{P \Rightarrow Q}$.
Ο ισχυρισμός « $\mathbf{P \Rightarrow Q}$ » λέγεται συνεπαγωγή και πολλές φορές διαβάζεται «αν P, τότε Q». Η πρόταση P λέγεται υπόθεση της συνεπαγωγής, ενώ η Q λέγεται συμπέρασμα αυτής.

Παρατήρηση. Η συνεπαγωγή « $\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q}$ » είναι ψευδής μόνο όταν η υπόθεση P είναι αληθής και το συμπέρασμα Q είναι ψευδές και αληθής σε κάθε άλλη περίπτωση. Βεβαίως εμείς θα ασχοληθούμε κυρίως με την περίπτωση που «αν η P είναι αληθής, τότε είναι και η Q.

Η έννοια της ισοδυναμίας ή της διπλής συνεπαγωγής.
Αν P και Q είναι δύο προτάσεις, τέτοιες ώστε, όταν αληθεύει η P, να αληθεύει και η Q και όταν αληθεύει η Q, να αληθεύει και η P, τότε λέμε ότι η P συνεπάγεται την Q και αντιστρόφως ή, αλλιώς, ότι η P είναι ισοδύναμη με την Q και γράφουμε «P $\Leftrightarrow$ Q».

Ο ισχυρισμός **«P $\Leftrightarrow$ Q»** λέγεται **ισοδυναμία** και αρκετές φορές διαβάζεται **«P αν και μόνο αν Q»**.

Παρατηρήσεις πάνω στη συνεπαγωγή και την ισοδυναμία.

(I). Η «P $\Leftrightarrow$ Q» είναι στην ουσία η σύζευξη των «P $\Rightarrow$ Q» και «Q $\Rightarrow$ P»

(II). Αν μια πρόταση « $\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q}$ » είναι αληθής, δεν είναι απαραίτητο να είναι αληθής και η αντίστροφη πρόταση « $\mathbf{Q} \Rightarrow \mathbf{P}$ ». Αν θέλουμε να είμαστε σίγουροι, πρέπει να το αποδείξουμε.

Μέθοδοι απόδειξης
Προκειμένου να πεισθούμε ότι μια πρόταση είναι αληθής προσπαθούμε να την αποδείξουμε. Για το σκοπό αυτό ακολουθούμε μια από τις παρακάτω μεθόδους.

Ευθεία Απόδειξη
Αν θέλουμε να αποδείξουμε μια πρόταση της μορφής « $\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q}$ », τότε ξεκινούμε από την P και με βάση τους κανόνες της Μαθηματικής Λογικής καταλήγουμε στην Q. Στην πορεία μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε οποιαδήποτε γνωστή πρόταση καθώς και τα αξιώματα.

Παράδειγμα.
Έστω ότι θέλουμε να αποδείξουμε τη συνεπαγωγή:
«Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$, τότε ισχύει $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$ »
Απόδειξη
Επειδή $\alpha+\beta+\gamma=0$, θα είναι $\alpha=-(\beta+\gamma)$, οπότε έχουμε :

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=\left[-\left(\beta+\gamma\right)\right]^3+\beta^3+\gamma^3=-\left(\beta+\gamma\right)^3+\beta^3+\gamma^3=$$

$$=-\beta^3-3\beta^2\gamma-3\beta\gamma^2-\gamma^3+\beta^3+\gamma^3=-3\beta^2\gamma-3\beta\gamma^2=-3\beta\gamma(\beta+\gamma)=3\alpha\beta\gamma \ (\text{αφού } \beta+\gamma=-\alpha)$$

Απόδειξη πρότασης μέσω ισοδυναμιών.
Για να αποδείξουμε ότι ένας ισχυρισμός είναι αληθής, μερικές φορές με διαδοχικούς μετασχηματισμούς καταλήγουμε σε έναν λογικά ισοδύναμο ισχυρισμό που είναι αληθής. Έτσι συμπεραίνουμε ότι και ο αρχικός ισχυρισμός είναι αληθής.

Παράδειγμα.
Έστω ότι για τους πραγματικούς αριθμούς α, β, x, y θέλουμε να αποδείξουμε την ταυτότητα :
$\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(x^2+y^2\right)=\left(\alpha x+\beta y\right)^2+\left(\alpha y-\beta x\right)^2$.
Απόδειξη

Έχουμε
$$\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(x^2+y^2\right)=\left(\alpha x+\beta y\right)^2+\left(\alpha y-\beta x\right)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2x^2+\alpha^2y^2+\beta^2y^2=\alpha^2x^2+2\alpha\beta xy+\beta^2y^2+\alpha^2y^2-2\alpha\beta xy+\beta^2x^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2x^2+\alpha^2y^2+\beta^2y^2=\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\alpha^2y^2+\beta^2x^2, \text{ που ισχύει.}$$

Επειδή η τελευταία ισότητα είναι αληθής, άρα και η ισοδύναμή της αρχική είναι αληθής.

Μέθοδος της Απαγωγής σε Άτοπο
Στην παραπάνω απόδειξη υποθέσαμε ότι δεν ισχύει αυτό που θέλαμε να αποδείξουμε και χρησιμοποιώντας αληθείς προτάσεις φθάσαμε σε ένα συμπέρασμα που έρχεται σε αντίθεση με αυτό που γνωρίζουμε ότι ισχύει. Οδηγηθήκαμε όπως λέμε σε **άτοπο**.
Η μέθοδος αυτή απόδειξης χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τους Αρχαίους Έλληνες και λέγεται **απαγωγή σε άτοπο**.

Παράδειγμα
Έστω ότι θέλουμε να αποδείξουμε τον ισχυρισμό : Αν το τετράγωνο ενός ακεραίου αριθμού είναι άρτιος, τότε και ο αριθμός αυτός είναι άρτιος, δηλ. αν ο α^2 είναι άρτιος αριθμός, τότε και ο α είναι άρτιος.
Απόδειξη
Έστω ότι ο δεν είναι άρτιος. Τότε ο α είναι περιττός, δηλ. έχει τη μορφή $\alpha = 2\kappa + 1$, όπου κ ακέραιος. Τότε $\alpha^2 = (2\kappa+1)^2 = 4\kappa^2 + 4\kappa + 1 = 2(2\kappa^2 + 2\kappa) + 1 = 2\lambda + 1$, όπου $\lambda = 2\kappa^2 + 2\kappa$ ακέραιος. Επομένως το α^2 είναι περιττός. Αυτό όμως έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση ότι ο α^2 είναι άρτιος αριθμός.
Επομένως η παραδοχή ότι ο α δεν είναι άρτιος είναι λανθασμένη. Άρα ο α είναι άρτιος.

Βασική παρατήρηση.
Για να αποδείξουμε ότι ένας ισχυρισμός **δεν είναι πάντα αληθής**, αρκεί να βρούμε ένα παράδειγμα για το οποίο ο συγκεκριμένος ισχυρισμός δεν ισχύει ή, όπως λέμε, αρκεί να βρούμε ένα **αντιπαράδειγμα**.
Παράδειγμα :
Ο ισχυρισμός «για κάθε α > 0 ισχύει $\alpha^2 > \alpha$ » δεν είναι αληθής, αφού για $\alpha = \frac{1}{2}$ έχουμε $\alpha^2 = \frac{1}{4}$, δηλ. ισχύει $\alpha^2 < \alpha$.

Παρατήρηση (να γίνει σχετική αναφορά στη Β Λυκείου)
Η έννοιες του υποσυνόλου και της ισότητας συνόλων σχετίζονται άμεσα με τις έννοιες της συνεπαγωγής και της ισοδυναμίας. Συγκεκριμένα ισχύει :
Αν p(x), q(x) είναι δυο προτασιακοί τύποι που αναφέρονται σε ένα σύνολο αναφοράς Ω και Α, Β είναι τα σύνολα αληθείας τους, τότε :
Θ1. **Το (p(x) $\Rightarrow$ q(x)) είναι ισοδύναμο με το Α $\subseteq$ Β.**
Θ2. **Το (p(x) $\Leftrightarrow$ q(x)) είναι ισοδύναμο με το Α = Β.**

Παρατήρηση (να γίνει σχετική αναφορά στη Γεωμετρία της Α Λυκείου στο κεφάλαιο των παραλληλογράμμων).
Οι προτάσεις « $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}$ » και « $\neg\mathbf{Q} \rightarrow \neg\mathbf{P}$ » είναι ισοδύναμες.
Η πρόταση « $\neg\mathbf{Q} \rightarrow \neg\mathbf{P}$ » ονομάζεται **αντιθετοαντίστροφη** της « $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}$ ».
Παράδειγμα :
«Αν το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο, τότε είναι και παραλληλόγραμμο»
«Αν το ΑΒΓΔ δεν είναι παραλληλόγραμμο, τότε δεν είναι και ορθογώνιο»
Οι παραπάνω προτάσεις είναι ισοδύναμες.